

**Dimensionen zur Einschätzung  
pädagogisch-fachdidaktischer Qualität  
von Lehr-Lernsituationen  
im Mathematikunterricht  
der Grundschule**

**Schulungsunterlagen**

Anna Susanne Steinweg  
Otto-Friedrich-Universität Bamberg  
[anna.steinweg@uni-bamberg.de](mailto:anna.steinweg@uni-bamberg.de)

2022



## Inhaltsverzeichnis

Zur Entwicklung der Dimensionen .....	3
Dimensionen.....	4
Pole der Skalierung der Dimensionen .....	5
Zum Einsatz der Dimensionen .....	6
Aufgabenqualität / Problemstellungen .....	7
Aufgabenqualität und Problemstellungen im niedrigen Bereich (1, 2) .....	8
Aufgabenqualität und Problemstellungen im mittleren Bereich (3, 4, 5).....	9
Aufgabenqualität und Problemstellungen im hohen Bereich (6, 7) .....	11
Anschauung / Mentale Bilder.....	12
Anschauung und mentale Bilder im mittleren Bereich (3, 4, 5) .....	14
Anschauung und mentale Bilder im hohen Bereich (6, 7).....	15
Denkfreiheiten / Kommunikation .....	16
Denkfreiheiten und Kommunikation im niedrigen Bereich (1, 2) .....	17
Denkfreiheiten und Kommunikation im mittleren Bereich (3, 4, 5) .....	18
Denkfreiheiten und Kommunikation im hohen Bereich (6, 7).....	19
Fehlerkultur / Leistungsbewertung.....	21
Fehlerkultur und Leistungsbewertung im niedrigen Bereich (1, 2) .....	22
Fehlerkultur und Leistungsbewertung im mittleren Bereich (3, 4, 5).....	23
Fehlerkultur und Leistungsbewertung im hohen Bereich (6, 7) .....	25
Ziele / Zieltransparenz .....	26
Ziele und Zieltransparenz im niedrigen Bereich (1, 2) .....	27
Ziele und Zieltransparenz im mittleren Bereich (3, 4, 5) .....	28
Ziele und Zieltransparenz im hohen Bereich (6, 7).....	29
Übersicht der theoretischen Verankerung .....	30
Beobachtungsbogen Mathematik .....	32
Literatur: Auswahl und Leseanregungen .....	33



## Zur Entwicklung der Dimensionen

Als Basis der Entwicklung und Konstruktion dient das amerikanische Instrument Classroom Assessment Scoring System, kurz CLASS, von Pianta et al. (2008)<sup>1</sup>, das mit Videoanalysen von je mindestens vier Zyklen à 20 min in kategoriellen Scores aufgrund von Indikatoren arbeitet. CLASS ist nicht fachspezifisch motiviert, sondern beschreibt allgemeine Dimensionen der ‚Classroom Quality‘. Hierbei werden drei Bereiche der unterrichtlichen Unterstützung, die in ihrer Ausprägung in die Beurteilung einfließen, unterschieden.

Emotional Support	Classroom Organization	Instructional Support
Positive Climate	Behavior Management	Concept Development
Negative Climate	Productivity	Quality of Feedback
Teacher Sensitivity	Instructional Learning Formats	Language Modeling
Regard for Student Perspectives		

Die im Folgenden dargelegten Dimensionen zur Einschätzung des mathematischen Anfangsunterrichts sind als homogene Ergänzung der allgemeinen, fachunspezifischen Dimensionen nach Pianta et al. (2008) konstruiert. Der Einsatz und die Darstellung der für den mathematischen Anfangsunterricht als Additiv entwickelten Dimensionen folgen exakt dem Vorbild des Classroom Assessment Scoring System (CLASS), um als tatsächliche Ergänzung parallel einsetzbar zu sein.

*Dimensionen* sind dabei die als bedeutsam erkannten, herausgearbeiteten Bereiche der Unterrichtsgestaltung. Sie sind als Handlungsrepertoire der Lehrpersonen formuliert, da diese im Fokus der Beobachtung stehen. Die Handlungen werden je Dimension wiederum durch markante Unterpunkte der Dimension (Indikatoren) spezifiziert.

Zum wissenschaftlichen Hintergrund siehe auch:

Steinweg, Anna Susanne (2011). Einschätzung der Qualität von Lehr-Lernsituationen im mathematischen Anfangsunterricht – ein Vorschlag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(1), 1–26.

---

<sup>1</sup> Pianta, Robert C., La Paro, Karen M. & Hamre, Bridget K. (2008). *Classroom Assessment Scoring System*. Paul H Brookes Publishing..



## Dimensionen

### **Aufgabenqualität / Problemstellungen**

Spiegelt die Anforderungsmerkmale der angebotenen Aufgaben und Problemstellungen unter Berücksichtigung des Kognitionsniveaus und den daraus resultierenden Lernchancen wider.

### **Anschauung / Mentale Bilder**

Verdeutlicht den Einsatz und die Motive der Auswahl von didaktischem Material oder Abbildungen sowie die Wertschätzung der Ausbildung mentaler Bilder und Grundvorstellungen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler in mathematischen Lehr-Lernsituationen.

### **Denkfreiheiten / Kommunikation**

Erfasst die zur Verfügung gestellte individuelle Freiheit und Tiefe der Auseinandersetzung sowie das Ausmaß der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler innerhalb des Mathematikunterrichts. Sie umschließt dabei auch das Ausmaß der ernsthaften Kommunikation über verschiedene Lösungs- und Denkwege in bewusst gestalteten Phasen des Unterrichts.

### **Fehlerkultur / Leistungsbewertung**

Umfasst den Umgang der Lehrperson mit Verstehensproblemen und Fehlantworten. Sie berücksichtigt dabei auch die Ausprägung und Intention von Rückmeldungen sowie die Abgrenzung zu Bewertungen.

### **Ziele / Zieltransparenz**

Spiegelt die Ausprägung von Vernetzungsgedanken und die Nutzung von Sinnzusammenhängen inner- und außerfachlich wider, die sich in Prozess- und Inhaltszielen darstellen. Zusätzlich beinhaltet diese Dimension die in den Lehr-Lernsituationen genutzte Transparenz dieser Ziele.



## Pole der Skalierung der Dimensionen

Die Ausprägung der Dimensionen kann auf einer Skala zwischen den beiden Polen *hohe Qualität versus niedrige Qualität der Dimension* gefasst werden.

### Aufgabenqualität und Problemstellungen

herausfordernde Situationen (Kognitive Anforderungen auf verschiedenen Niveaus ermöglichen, Übung von Grundwissen mit Entdeckungen und Möglichkeiten der Erklärung von Zusammenhängen)

vs.

Routineaufgaben (Anforderungsbereich fordert allein Grundwissen und Routinen)

### Anschauung und mentale Bilder

zielgerichteter Einsatz tragfähiger Anschauungsmittel (Darstellungsmittel, Material, Zeichnungen) zur Förderung mentaler Grundvorstellungen (über Zahlen, Rechenoperationen, Geometrische Objekte etc.)

vs.

Beliebigkeit (Materialfülle, fehlende sinnvolle Vorauswahl in Bezug zur Aufgabe) und fehlende Achtsamkeit auf Vorstellungsentwicklung (Tricks, schnelle Hilfen, Lösungsfixiertheit etc.)

### Denkfreiheiten und Kommunikation

eigenaktive Bearbeitung von Problemen mit offenen Lösungswegen (Eigenproduktionen, Lernen auf eigenen Wegen), die gemeinsam besprochen und kritisch diskutiert werden (durchgängige, kognitive Aktivierung möglichst aller Schülerinnen und Schüler)

vs.

vorgegebene Rezepte (Imitation), deren möglichst rasches Abarbeiten allein durch falsch-richtig Bewertungen (Abhaken, Lösungswort finden, Schablonen etc.) gewürdigt wird (Aktivität der Schülerinnen und Schüler nur beim Reproduzieren)

### Fehlerkultur und Leistungsbewertung

produktives Nutzen der Fehler (Aufgreifen der Umwege und Missverständnisse sowie individuelle und auch gemeinsame, bewertungsfreie Diskussion, Argumentationen über Gültigkeit und evtl. Effizienz) sowie individuelle Rückmeldung (Beachtung des individuellen Leistungszuwachs, entwicklungsbezogene Rückmeldungen)

vs.

ständige Bewertung und Selektion (schlichte Korrektur in Bezug auf einen, von der Lehrperson geplanten Lösungsweg)

### Ziele und Zieltransparenz

Einbettung der Anforderungen und Inhalte in Sinnzusammenhänge (innermathematisch oder auch außermathematisch) sowie Verfolgung inhaltlicher und allgemeiner, mathematischer Bildungsziele mit Möglichkeiten zur Reflexion über Vorgehen, Vernetzungen und die Mathematik

vs.

kleinschrittige Anforderungen ohne Sinnzusammenhänge und rein inhaltsbezogene, segmentierte (Teil-)Ziele, die durch die Lehrperson schrittweise vorangetrieben werden

## Zum Einsatz der Dimensionen

Im Folgenden werden die fünf Qualitätsdimensionen von Lehr-Lernsituationen im Fach Mathematik zunächst in einer tabellarischen Übersicht dargelegt und dann in den drei Kernbereichen (niedrig, mittel, hoch) anhand eines exemplarisch beschreibenden Textes dargelegt. Werden inhaltliche Beispiele in den Illustrationen genutzt, so stammen diese vornehmlich aus dem Anfangsunterricht. Die Darstellungen sind jedoch für alle Jahrgänge der Grundschule übertragbar.

Die Scores orientieren sich hierbei ebenso wie die grundlegende Beobachtung in Zyklen am CLASS (Classroom Assessment Scoring System) nach Pianta et al. (2008).

### Score

- wird für jede Dimension vergeben und repräsentiert das Ausmaß, in dem diese Dimension für die spezifische Lehr-Lernsituation charakteristisch ist
- 1 (für am wenigsten charakteristisch) bis 7 (für im hohen Maße charakteristisch)

### Zyklus

- 20 Minuten Beobachtung, 10 Minuten Protokoll
- Minimum: 4 Zyklen

Es sollte darauf geachtet werden, dass im Allgemeinen nicht Einzelereignisse im Vordergrund des Ratings stehen, sondern eine möglichst charakteristische Gesamteinschätzung erfolgt.

Nicht alle Beispiele aus den exemplarischen Erläuterungen müssen für die Vergabe eines bestimmten Ratings einer Dimension vorliegen. Die Beispiele geben nur eine Richtlinie für die Vergabe.

Es müssen auch nicht zwingend alle Indikatoren (Marker) des Ratingbereichs vorliegen. Eine Einordnung in eine der Dimensionen ist mitunter auch über weniger Detailbeobachtungen möglich.

niedriges Niveau		mittleres Niveau			hohes Niveau	
1	2	3	4	5	6	7
alle Indikatoren niedriger Bereich	alle bis auf 1 Indikator niedriger Bereich	1 oder 2 Indikatoren mittlerer Bereich	alle Indikatoren mittlerer Bereich	1 Indikator bereits hoher Bereich	alle bis auf 1 Indikator hoher Bereich	alle Indikatoren hoher Bereich

Auch wenn nicht alle Beobachtungen zu einer bestimmten Kategorie gezählt werden können, sollte immer die Gesamtsituation in ihrer Ausprägung betrachtet und gewürdigt werden.

Die Dimensionen sind so weit wie möglich trennscharf formuliert. Es gibt jedoch einige Überschneidungen, die sich aus der natürlichen Lehr-Lernsituation ergeben, die gleichzeitig verschiedene Dimensionen abbilden kann. Dies ist bei der Beurteilung mit einzubeziehen.

In einer abschließenden Tabelle wird die theoretische Verankerung in aktuelle, fachdidaktische Theorien und die Bildungsstandards für die Mathematik in einer Übersicht dargestellt.

## Aufgabenqualität / Problemstellungen

Spiegelt die Anforderungsmerkmale der angebotenen Aufgaben und Problemstellungen unter Berücksichtigung des Kognitionsniveaus und den daraus resultierenden Lernchancen wider.

Aufgabenqualität / Problemstellungen	niedrig (1,2)	mittel (3,4,5)	hoch (6,7)
<ul style="list-style-type: none"> <li>kognitive Herausforderung</li> </ul>	<p>Die dargebotenen Aufgaben und Probleme fordern die Kinder nicht auf, ihr aktuelles kognitives Niveau zu überschreiten.</p>	<p>Die Aufgaben bieten manchmal Herausforderungen, die problemlösendes Bearbeiten fordern.</p>	<p>Die Aufgaben bieten stets Herausforderungen, die problemlösendes Bearbeiten fordern.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Möglichkeiten der Entdeckung und Erklärung von Zusammenhängen</li> </ul>	<p>Die Aufgaben bieten allein Routineanforderungen</p>	<p>Die Aufgaben bieten manchmal Gelegenheit, (mathematische) Entdeckungen zu machen und Zusammenhänge zu erklären.</p>	<p>Die Aufgaben bieten immer Gelegenheit, (mathematische) Entdeckungen zu machen und Zusammenhänge zu erklären.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Bedeutung der Sicherung von Grundwissen und Routinen (Üben)</li> </ul>	<p>Im Mittelpunkt steht das Trainieren im ganz traditionellen Sinn von bereits Gelerntem.</p>	<p>Grundwissen wird ab und zu integriert in Aufgaben, die neben Routinen auch Entdeckungen ermöglichen.</p>	<p>Grundwissen wird zu jeder Zeit integriert in Aufgaben, die neben Routinen auch Entdeckungen ermöglichen.</p>

z. B. Ruwisch & Peter-Koop, 2003; Steinweg, 2005b & 2006; Sundermann & Selter, 2021; Wittmann & Müller, 2017 & 2018; Wygotski, 1972; Zankov, 1973

## **Aufgabenqualität und Problemstellungen im niedrigen Bereich (1, 2)**

### **Die dargebotenen Aufgaben und Probleme fordern die Kinder nicht auf, ihr aktuelles kognitives Niveau zu überschreiten.**

Aufgaben zur Bearbeitung in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit werden erst nach ausführlichen Erklärungsphasen, die die genaue Vorgehensweise darlegen, angeboten. Die Lehrperson traut den Kindern nicht zu, Problemstellungen, die die vermeintlich bereits vorhandenen Anforderungen überschreiten anzugehen.

Sie vermeidet im Gegenteil gerade solche Herausforderungen. Dies wird z. B. dadurch deutlich, dass sie einzelne Aufgaben im Schulbuch absichtlich zurückstellt mit dem Hinweis, dass diese noch nicht bearbeitet werden können („Das könnt ihr noch nicht.“) bzw. dass die Erläuterung des genauen Vorgehens später erfolgen wird („Wartet damit noch, bis ich es euch erklärt habe.“)

Diese Vermeidung von vermeintlichen Schwierigkeiten bei der selbstständigen Erarbeitung gelingt der Lehrperson auch dadurch, dass sie die Kinder in verschiedene Gruppen einteilt und diesen gezielt „angemessene“ Aufgaben vorlegt. In dieser Form der Differenzierung sind jedoch in keiner der Gruppierungen „neue“ Aufgabenformen inbegriffen, stattdessen werden gleichförmige Aufgaben höchstens mit anderen Ziffern oder mit kleineren oder größeren Zahlen dargeboten.

### **Die Aufgaben bieten allein Routineanforderungen.**

Sobald die Schülerinnen und Schüler einen Arbeitsauftrag erhalten, erwartet die Lehrperson, dass sie diese im Sinne eines gegebenen Reizes durch eine schnelle Reaktion zu lösen in der Lage sind. Das Anforderungsniveau der Aufgaben wird insbesondere durch Unmutsäußerungen der Lehrkraft bei Nachfragen („Wie oft soll ich das noch erklären?“, „Das haben wir doch geübt.“) gekennzeichnet. Ebenso auch bei unterstützenden Maßnahmen, die deutlich machen, dass die Lehrperson Einzelnen oder auch Gruppen explizit noch einmal detailliert vormacht, wie die Aufgaben gelöst werden sollen.

Die präsentierten Aufgaben bieten kein Potenzial, Beziehungen zwischen den Aufgaben zu entdecken. Derartige Zusammenhänge werden im Gegenteil sogar vermieden. Bei Übungen zum Einmaleins folgt z. B. auf die Aufgabe 2·5 niemals 3·5 o.Ä., sondern stets eine Aufgabe, die in allen Faktoren von der vorangehenden abweicht (z. B. 3·7 oder 4·6).

### **Im Mittelpunkt steht das Trainieren im ganz traditionellen Sinn von bereits Gelerntem.**

Die Lehrperson achtet in Übungsphasen vor allem auf die Quantität der bearbeiteten Aufgaben. Zusätzlich ist ihr der Aspekt der Schnelligkeit der Lösungsfindung außerordentlich wichtig. Die Arbeitsblätter bieten stets durchweg gleichförmige mathematische Anforderungen, die gerade zu diesem Zeitpunkt „dran sind“ (z. B. durchweg Additionsaufgaben).

Die Variation der Aufgaben wird nur äußerlich gegeben: Additionsaufgaben in schlichten Rechenaufgaben wechseln sich mit Additionen in Präsentationen als Rechenblumen, Rechensternen oder Tabellen ab. Als Übungsmaterial dienen auch vorgefertigte Vorlagen wie LÜK-Kästen oder Materialien, bei denen z. B. richtige Farben oder Muster aus Wollfäden die Lösungen anzeigen. Im Vordergrund stehen stets Faktenkenntnisse (Frage-Antwort) und so genannte abrufbare Fertigkeiten wie das Einmaleins, Einspluseins o. Ä. wie sie aus Rechenspielen wie Eckenraten oder Rechenkönig usw. bekannt sind.

## **Aufgabenqualität und Problemstellungen im mittleren Bereich (3, 4, 5)**

### **Die Aufgaben bieten manchmal Herausforderungen, die problemlösendes Bearbeiten fordern.**

Die Lehrperson gibt normalerweise lange ausführliche Erklärungen, die die genaue Vorgehensweise und die Lösungswege zunächst darstellen, bevor die Schülerinnen und Schüler selbstständig Aufgaben aus Büchern oder Arbeitsblättern bearbeiten. In einigen Fällen wird von diesem Vorgehen abgewichen. Die Lehrperson gibt als Experiment einzelne Aufgaben zunächst in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit und bittet die Kinder, die Aufgaben soweit zu lösen, wie sie es können. Die natürlicherweise hierbei auftretenden Probleme werden manchmal im Vorfeld als „normal“ oder „nicht schlimm“ angekündigt. Die Kinder werden ermutigt, bis zu einem gewissen Grad, die Unsicherheit bei der Bearbeitung auszuhalten.

Zumeist wird die Lehrkraft aber nach einer nicht allzu langen Phase des probierenden Lösens in die Bearbeitung eingreifen, d. h. sie versucht den Kindern zuzutrauen, dass sie sinnvolle Wege der Bearbeitung finden, greift aber schnell ein, wenn sie den Verdacht hat, dass die Kinder in zu verschiedene Richtungen ausbrechen. Sie beruhigt dann sich und die Kinder damit, dass die auftretenden Probleme durch eine gute Erklärung (Vormachen) gelöst werden können.

In dem Wissen, dass die Lehrperson ihnen auf Äußerungen, die deutlich machen, dass sie nicht weiter kommen, zumeist sehr schnell direkte Hilfen anbietet, geben die Kinder selbst nach nicht allzu großen Mühen zumeist auf, die Herausforderungen der Aufgaben zu meistern. Die gesamte Situation ist als „Ausnahmesituation“ bei allen Beteiligten bekannt. Je höher diese Dimension ausgebildet ist, um so weniger „ungewöhnlich“ erscheinen derartige Arbeitsphasen, die Ausdauer, Mühe und Problemlöseverhalten einfordern, den beteiligten Kindern, die sich neugierig an die Arbeit machen, und der Lehrkraft, die auch einmal Unsicherheiten bei den Kindern aushält und immer weniger vermeintlich helfend beispringt.

### **Die Aufgaben bieten manchmal Gelegenheit, (mathematische) Entdeckungen zu machen und Zusammenhänge zu erklären.**

Die dargebotenen Aufgaben in Phasen der Einführung oder Übung haben in zusätzlichen Anteilen, z. B. durch eine Teilaufgabe b) oder eine Zusatzfrage, Komponenten, die deutlich machen, dass neben den rein mathematischen Lösungen (Ergebniszahl, Antwortsatz, Begriff) auch weitere Entdeckungen gemacht werden könnten. Diese Entdeckungen betreffen dabei vor allem mathematische Beziehungen (z. B. alle Ergebnisse sind Vielfache von 5 / die Ergebnisse wachsen immer um 2 an etc.). Diese Zusatzaufgaben werden mitunter nur an die „schnellen“ Kinder gegeben. Die Wahrnehmung und Bedeutung dieser Lernchancen wird im Unterricht dadurch deutlich, wie viel Zeit für die Darlegung der gemachten Entdeckungen eingeräumt wird oder ob sie eher gar nicht oder nur am Rande thematisiert werden.

**Grundwissen wird ab und zu integriert in Aufgaben, die neben Routinen auch Entdeckungen ermöglichen.**

Die Aufgaben in den Übungsphasen zur Festigung des Grundwissens sind im Allgemeinen den Aufgaben des niedrigen Niveaus ähnlich (Die Lehrperson achtet auf die Quantität der bearbeiteten Aufgaben und die Schnelligkeit der Lösungsfindung; Aufgaben werden nur im äußeren Erscheinungsbild variiert). Ab und zu werden jedoch bei so genannten Übungseinheiten neben den bereits erlernten Routinen und dem Grundwissen auch Entdeckungsaufgaben mit einbezogen. Das kann z. B. bedeuten, dass Übungen zum Einmaleins auch einfache Beziehungen zwischen den Einzelaufgaben aufzeigen ( $2 \cdot 5$ ,  $4 \cdot 5$ ,  $6 \cdot 5$ ,  $8 \cdot 5$  ...). Diese Entdeckungen können auch erfragt werden, indem die erkannten Beziehungen fortgesetzt werden müssen („Wie geht es weiter?“). So genannte substanzielle Aufgabenformate, bei denen mathematische Beziehungen integriert sind, wie z. B. bei Zahlenmauern, werden ebenso manchmal genutzt. Je deutlicher dann auf die Beziehungen und nicht nur auf die Lösungszahlen eingegangen wird, umso höher ist diese Dimension ausgeprägt.

## **Aufgabenqualität und Problemstellungen im hohen Bereich (6, 7)**

### **Die Aufgaben bieten stets Herausforderungen, die problemlösendes Bearbeiten fordern.**

Der Unterricht ist in der Regel so gestaltet, dass die Kinder zunächst selbstständig allein, zu zweit oder in Gruppen eine herausfordernde Aufgabe lösen müssen, bevor ihnen genaue Arbeitsanweisungen oder Lösungshilfen gegeben werden.

Die Lehrperson vertraut auf die probierenden und systematisch-heuristischen Ideen der Schülerinnen und Schüler und lässt genügend Zeit, um in Ruhe die gestellten Probleme anzugehen. Sie ermutigt die Kinder durchweg und vermeidet es, zu schnell auf Hilfesuche einzugehen. Im Gegenteil gibt sie den Kindern immer wieder zu verstehen, zunächst selbstständig Lösungen oder Lösungsansätze zu erproben.

Dies gilt auch für „neue“ Themen im Unterricht, die nicht langatmig erklärt werden, sondern bei denen die Schülerinnen und Schüler an erster Stelle eigene Bearbeitungsweisen entwickeln dürfen und müssen. So wird z. B. die Aufgabe  $28+37$  nicht in vielen Vorbereitungsstunden langsam über  $20+30$ ,  $28+30$  und schließlich erst  $28+37$  entwickelt, sondern im Gegenteil wird die vermeintlich schwere Aufgabe an den Anfang gestellt und eigenständig gelöst.

### **Die Aufgaben bieten immer Gelegenheit, (mathematische) Entdeckungen zu machen und Zusammenhänge zu erklären.**

Dadurch, dass alle Beteiligten großen Wert auf die Entdeckungen legen, muss die Lehrperson zumeist gar nicht mehr nachfragen, welche Beziehungen oder Muster die Kinder erkannt haben, sie werden vielmehr von sich aus auf diese Entdeckungen hinweisen und diese beschreiben oder sogar erklären.

Die Herausforderungen werden nicht nur einzelnen Kindern oder einem Teil der Klasse gestellt, sondern werden stets an alle Kinder herangetragen. Die Vielfalt der Entdeckungen und die Tiefe des Verständnisses unterscheidet sich nach der Bearbeitung selbstverständlich (natürliche Differenzierung), wird aber niemals im Vorfeld festgelegt.

### **Grundwissen wird zu jeder Zeit integriert in Aufgaben, die neben Routinen auch Entdeckungen ermöglichen.**

Natürlich werden auch Übungsaufgaben zu den Grundwissenkompetenzen angeboten. Diese bieten jedoch neben der Übung der Routinen immer weitergehende Herausforderungen, die die Beziehungen zwischen Lösungen und Aufgaben in den Mittelpunkt rücken. Dies gilt im Unterricht von Anfang an. Bei Einspluseins-Übungen werden z. B. in Zahlenhäusern alle Plusaufgaben mit der Lösung 7 zum einen gesucht und zum anderen werden auch die Beziehungen der Aufgaben nachgefragt. Dies gelingt z. B. durch die Bitte, die Aufgaben zu sortieren ( $0+7$ ,  $1+6$ ,  $2+5$  usw.) oder aber die Aufgaben in ihrer Veränderung zu beschreiben.

Andere Aufgabenformate, wie Zahlenmauern, bieten Herausforderungen durch kleine Variationen („Erhöhe eine Zahl. Was passiert?“). Grundsätzlich sind solche operativen Veränderungen und die begleitende Frage nach der Wirkung („Was passiert, wenn ...?“) ein Hauptbestandteil aller Übungsaufgaben.

## Anschauung / Mentale Bilder

Verdeutlicht den Einsatz und die Motive der Auswahl von didaktischem Material oder Abbildungen sowie die Wertschätzung der Ausbildung mentaler Bilder und Grundvorstellungen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler in mathematischen Lehr-Lernsituationen.

Anschauung / Mentale Bilder	niedrig (1,2)	mittel (3,4,5)	hoch (6,7)
<ul style="list-style-type: none"> <li>Angebot von Anschauungsmitteln</li> </ul>	<p>Wenn überhaupt, bietet die Lehrperson den Lernenden gar nicht oder kaum Gelegenheit, adäquate Anschauungsmittel zu nutzen.</p>	<p>Die Lehrperson bietet den Lernenden manchmal Anschauungsmittel zielgerichtet an.</p>	<p>Die Lehrperson bietet den Lernenden stets adäquate Anschauungsmittel zielgerichtet an.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Auswahl der Anschauungsmittel</li> </ul>	<p>Sie stellt die Anschauungsmittel völlig beliebig zur Verfügung.</p>	<p>Sie verdeutlicht ab und zu den Bezug der behandelten Themen zum spezifischen Anschauungsmittel.</p>	<p>Sie verdeutlicht den Bezug der behandelten Themen zu diesem spezifischen Anschauungsmittel.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Ausbildung von Grundvorstellungen</li> </ul>	<p>Sie legt offensichtlich keinen Wert auf die Ausbildung von inneren Bildern und Grundvorstellungen, sondern vielmehr auf schnelle Ergebnisse.</p>	<p>Sie legt manchmal Wert auf die Ausbildung von inneren Bildern und Grundvorstellungen durch die Vernetzung von Anschauungsmitteln und Denkwegen.</p>	<p>Sie legt offensichtlich viel Wert auf die Ausbildung von inneren Bildern und Grundvorstellungen durch die Vernetzung von Anschauungsmitteln und Denkwegen.</p>

z. B. Hasemann & Stern, 2002; Lorenz, 2000; Mason, 1987; Ott, 2016; Söbbeke, 2005; vom Hofe, 2003; Voigt, 1993; Wittmann, 1993

## **Anschauung und mentale Bilder im niedrigen Bereich (1, 2)**

**Wenn überhaupt, bietet die Lehrperson den Lernenden kaum Gelegenheit, Anschauungsmittel zu nutzen.**

Sie zeigt sehr deutlich, dass die Anschauungsmittel eher für die erfunden wurden, die die Aufgaben immer noch nicht ohne Materialien lösen können. Deshalb schätzt sie die Problemlösungen, die auf rein abstrakter Ebene ablaufen und lobt Kinder, die diesen Weg gehen.

Insbesondere das Rechnen mit Fingern scheint in den Lehr-Lernsituationen verpönt oder sogar explizit verboten. Selbst wenn Schülerinnen und Schüler beim Rechnen mit Fingern beobachtet werden können, wird schnell deutlich, dass sie dies nur heimlich tun dürfen (unter dem Tisch hantieren).

Die Lehr-Lernsituationen sehen keine Diskussion über Materialien oder deren Bedeutung vor. Vielmehr werden sie nur im vermeintlichen Notfall und nur für einzelne Kinder hervorgeholt.

**Die Lehrperson stellt die Anschauungsmittel völlig beliebig zur Verfügung.**

Ebenso ein Anzeichen von niedriger Qualität des Unterrichts im Umgang mit Anschauungsmaterial ist es, wenn einige oder sogar sehr viele Materialien in Lehr-Lernsituationen zur Verfügung stehen und die Kinder in völliger Beliebigkeit –z. B. aus einer unstrukturierten Matheecke oder einem Regal voller Materialien– zu diesen greifen können.

Das Arbeiten mit den Materialien wird wenig oder kaum für Kommunikationen genutzt, da jedes Material unter Umständen eine andere Vorgehensweise erzwingt. Die Kinder nutzen insbesondere beim Rechnen das Material vornehmlich als Zählhilfe und erfahren auch darüber keine adäquate Rückmeldung, die ihnen effizientere Vorgehensweisen verdeutlichen und sie so vom zählenden Rechnen lösen könnte.

**Die Lehrperson legt offensichtlich keinen Wert auf die Ausbildung von inneren Bildern und Grundvorstellungen, sondern vielmehr auf schnelle Ergebnisse.**

Die Lehrperson ist sich zwar vermutlich darüber bewusst, dass Mathematik mit abstrakten Objekten arbeitet, ihr gelingt es jedoch nicht, die wesentliche Bedeutung von Anschauungsmaterial und dessen Handhabung als Weg zur Ausbildung und Vernetzung von Grundvorstellungen in Lehr-Lernsituationen anzuerkennen. Das Hauptaugenmerk der Lehr-Lernsituationen liegt auf schnellen Ergebnissen, die vornehmlich ohne Materialunterstützung ermittelt werden.

Die Bedeutung mentaler Repräsentationen von Zahlen z. B. als Mengenbilder (Punktmuster, strukturierte Würfelbilder etc.) oder als Bilder auf dem Zahlenstrahl sowie von Rechenoperationen als innere Handlungen, die in äußeren Handlungen zunächst erprobt wurden (Addieren als Zusammenlegen von Objektmengen), wird den Kindern im wahrsten Sinne nicht vor Augen geführt.

Die Lehrperson achtet wenig darauf, dass ein Verständnis der Themen mit tragfähigen Grundvorstellungen aufgebaut wird. Sie reagiert eher mit Tricks und Tipps, die schnell zu Lösungen führen, ohne auf echtes Verstehen zu setzen. Wenn zum Beispiel die Summe  $12+4$  ermittelt werden soll, genügen ihr Tricks wie die erste Ziffer (1) abzudecken und die beiden anderen zu addieren ( $2+4=6$ ) und dann die abgedeckte Zahl davor zu notieren (16).

## **Anschauung und mentale Bilder im mittleren Bereich (3, 4, 5)**

### **Die Lehrperson bietet den Lernenden manchmal Anschauungsmittel zielgerichtet an.**

Sie bittet demnach alle Kinder, ein spezifisches, von ihr als geeignet erkanntes Material für ein bestimmtes Thema oder zu einer bestimmten Unterrichtsphase zu nutzen.

Sie legt dabei nicht ganz konsequent Wert darauf, dass alle Kinder auch wirklich die Materialhandlungen vollziehen. Mitunter lobt sie auch Kinder, die kein Material benutzen, obwohl doch deutlich wird, dass sie die Bedeutung für die innere Vorstellung und das Verstehen von Aufgaben aufgrund von Anschauungsmitteln eigentlich erkannt hat. Dies drückt sich z. B. durch eindrückliche Bitten aus, das Material in die Überlegungen mit einzubeziehen.

### **Sie verdeutlicht ab und zu den Bezug der behandelten Themen zum spezifischen Anschauungsmittel.**

Vor allem in Lehr-Lernsituationen, in denen „neue“ Themen angesprochen werden, nutzt die Lehrperson auch Material. Dabei verdeutlicht sie die Handhabung und das Vorgehen der Lösung mit dem Material wie z. B. dass am Rechenrahmen durch Verschieben der Kugeln die Zahlen zunächst dargestellt und dann Ergebnisse abgelesen werden können. Für bestimmte Aufgaben gibt Sie das Material gezielt vor.

Je höher diese Dimension ausgebildet ist, umso mehr macht die Lehrperson deutlich, dass ein bestimmtes Material für eine bestimmte Vorgehensweise geeignet ist und ein anderes wiederum nicht. Mitunter lässt sie sich von den Kindern jedoch „überreden“, das Lieblingsmaterial nutzen zu dürfen.

### **Sie legt manchmal Wert auf die Ausbildung von inneren Bildern und Grundvorstellungen durch die Vernetzung von Anschauungsmittel und Denkwegen.**

So kann am Zahlenstrahl oder Rechenstrich die Aufgabe 3·4 nur dann verdeutlicht werden, wenn sie als zeitlich nacheinander ausgeführte Rechnung verstanden wird (Peter nimmt sich 3 mal 4 Bonbons). Am Zahlenstrahl sind demnach dreimal 4er-Sprünge zu machen, die letztlich zu 12 führen. Soll jedoch ein Getränkekasten mit 3·4 Flaschen als mentale Vorstellung (räumlich-simultan) genutzt werden, gelingt dies nur an Punktefeldern oder bedingt auch am Rechenrahmen, aber nicht am Zahlenstrahl. Beide mentalen Vorstellungen werden von der Lehrperson manchmal aufgabenspezifisch genutzt.

Der Vernetzungsgedanke, dass die abstrakte Aufgabe ohne jeglichen Kontext beide Grundvorstellungen benötigt, ist jedoch noch nicht immer durchgängig deutlich.

## **Anschauung und mentale Bilder im hohen Bereich (6, 7)**

### **Die Lehrperson bietet den Lernenden stets adäquate Anschauungsmittel zielgerichtet an.**

Die Kinder nutzen ein bestimmtes, von der Lehrperson in dieser Unterrichtsphase als sinnvoll erkanntes Material. Dabei lässt sich die Lehrperson nicht von Einzelwünschen der Kinder abbringen, sondern thematisiert genau, warum dieses Material in diesem Fall geeignet ist.

Die Bedeutung der Anschauungsmittel wird auch in den begleitenden Erläuterungen und Hinweisen der Lehrkraft immer bewusst wahrgenommen. Sie nutzt das Material nicht nur für die ersten Schritte, sondern zielgerichtet auch für die Erklärung von mathematischen Entdeckungen.

Das Material wird damit aus der Position herausgehoben, nur für die Kinder da zu sein, die es noch nicht ohne können. Im Gegenteil spielen die Anschauung und die Verdeutlichung von Rechenoperationen und Phänomenen durchgängig eine wesentliche Rolle im Unterrichtsgeschehen. Gerade auch für die leistungsstarken Kinder, die mithilfe von Material mathematische Phänomene deuten und erklären sollen.

### **Sie verdeutlicht den Bezug der behandelten Themen zu diesem spezifischen Anschauungsmittel.**

Diese Haltung zeigt sich konsequent dadurch, dass auch die Lehrperson selbst immer wieder zu einem bestimmten Material greift, wenn sie einen bestimmten Sachverhalt darstellen will. Sie nutzt dabei die Anschauungsmittel nicht nur, sondern benennt diese als günstig und effektiv für diese Art von Problemstellung bzw. fordert derartige Argumente von den Kindern ein.

Dabei grenzt sie das Vorgehen an diesem Material in der Diskussion mit den Kindern auch von anderem Material ab und verdeutlicht so die Vorteile des von ihr vorgegebenen Darstellungsmittels. Verschiedene Vorgehensweisen werden demnach von dem jeweils geeigneten Anschauungsmittel begleitet. Dabei werden die Vorgehensweisen selbst als gleichwertig anerkannt.

### **Sie legt offensichtlich viel Wert auf die Ausbildung von inneren Bildern und Grundvorstellungen durch die Vernetzung von Anschauungsmittel und Denkwegen.**

Die Lehrperson stellt nicht nur Bezüge zu den gerade behandelten Themen und Sachverhalten und dem Material her, sondern sie verknüpft diese auch mit den bereits gemachten Erfahrungen, z. B. aus dem vorangegangenen Schuljahr oder vergangenen Themengebieten. Sie ermöglicht es den Kindern somit durchgängig, die bereits entwickelten inneren Bilder zu bestimmten Rechenoperationen weiter zu vernetzen und auszubauen. Dies wird z. B. bei Analogien sehr deutlich, wenn beispielsweise die Aufgabe  $34+5$  mit der Aufgabe  $4+5$  in Beziehung gebracht wird – und zwar nicht auf der Ziffernebene, sondern in der Darstellung durch das Material (z. B. 34 als drei 10er-Stangen und 4 Einer, zu denen 5 Einer dazu kommen).

Die Lehrperson fragt stets nach den Vorstellungen der Kinder und bittet sie, diese z. B. aufzuzeichnen oder von ihnen zu berichten („Wie stellst du dir das vor?“, „Wie kann man das zeichnen?“). Sie berichtet auch selbst von ihren inneren Bildern, die ihr die Bearbeitung und das Verstehen von Zusammenhängen erleichtern.

## Denkfreiheiten / Kommunikation

Erfasst zur Verfügung gestellte individuelle Freiheit und Tiefe der Auseinandersetzung sowie das Ausmaß der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler innerhalb des Mathematikunterrichts. Sie umschließt dabei auch das Ausmaß der ernsthaften Kommunikation über verschiedene Lösungs- und Denkwege in bewusst gestalteten Phasen des Unterrichts.

Denkfreiheiten / Kommunikation	niedrig (1,2)	mittel (3,4,5)	hoch (6,7)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• kognitive Aktivierung</li> </ul>	<p>Der Lehrperson gelingt es kaum, mehr als einzelne Kinder kognitiv zu aktivieren.</p>	<p>Der Lehrperson gelingt es manchmal, mehrere oder sogar alle Kinder kognitiv zu aktivieren.</p>	<p>Der Lehrperson gelingt es häufig, alle Kinder kognitiv zu aktivieren.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• individuelle Denkwege</li> </ul>	<p>Wenn überhaupt, bietet die Lehrperson den Lernenden kaum Gelegenheit, eigene Lösungswege zu suchen.</p>	<p>Die Lehrperson bietet den Lernenden manchmal Gelegenheit, eigene Lösungswege zu suchen.</p>	<p>Die Lehrperson bietet den Lernenden stets Gelegenheit, eigene Lösungswege zu suchen.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• (fachliche) Diskussion von Lösungswegen</li> </ul>	<p>Sie initiiert keinen Austausch der Ideen in gemeinsamen Diskussionen (Partner/ Gruppen/ Plenum).</p>	<p>Sie initiiert ab und zu einen Austausch der Ideen in gemeinsamen, kritischen Diskussionen (Partner/ Gruppen/ Plenum).</p>	<p>Sie initiiert immer einen regen Austausch der Ideen in gemeinsamen, kritischen Diskussionen (Partner/ Gruppen/ Plenum).</p>

z. B. Freudenthal, 1971; Götze, 2007; Krauthausen & Scherer, 2010; Schwarzkopf, 2001; Selter, 1994; Steinweg, 2005a; Wollring, 2008

## Denkfreiheiten und Kommunikation im niedrigen Bereich (1, 2)

### **Der Lehrperson gelingt es kaum, mehr als einzelne Kinder kognitiv zu aktivieren.**

Die Aktivierung der Schülerinnen und Schüler geht über einen fragend-entwickelnden Unterricht wie in einem Ping-Pong-Spiel nicht hinaus. Die Lehrperson gibt sich mit kurzen Antworten der Kinder zufrieden, die manchmal nur aus Zahlenwerten (Ergebniszahl) oder Begriffen (z. B. Dreieck) bestehen.

Der Großteil der Kinder ist in einer zuhörenden Rolle. Die Schülerinnen und Schüler, die aktiv werden, bearbeiten kurze Anweisungen der Lehrperson in Form eines Vormachen-Nachmachens.

Führt die Lehrperson zum Beispiel einen neuen Begriff oder ein Lösungsverfahren ein, so setzt sie nicht auf das Vorwissen der Kinder, sondern erklärt den Begriff von sich aus. Sie gibt keine Möglichkeit für ein Herantasten oder Probieren, sondern besteht auf einer bestimmten Möglichkeit der Erarbeitung.

Dies wird auch bei Rechenoperationen deutlich, die sie in einer einzigen, von ihr vorgegebenen Art und Weise vorführt, um die Kinder anschließend zur Imitation dieses Vorgehens anzuhalten.

### **Wenn überhaupt, bietet die Lehrperson den Lernenden kaum Gelegenheit, eigene Lösungswege zu suchen.**

Die Lehrperson gibt die Lösungswege in Beispielen vor, die sie selbst oder einzelne Kinder an der Tafel oder auf einer Overhead-Folie vorführen. Sie scheint davon überzeugt, dass nur dieser eine Weg tatsächlich möglich ist. Dieser Denkweg der Lehrperson wird als eine Art Technik weitergegeben.

Wenn beispielsweise Rechnungen im Zahlenraum bis 20 mit einem 10er-Übergang gelöst werden sollen ( $7+6$ ), so müssen alle Kinder den von ihr vorgezeichneten Weg (z. B. Teilschrittverfahren,  $7+3=10$  und dann noch einmal  $+3$ ) nachgehen.

Gleiches gilt auch für Sachtexte, bei denen *die* Frage und *die* Antwort gesucht werden muss. Vielfach werden hier für die Bearbeitung sogar klare Schemata vorgegeben, die die Schülerinnen und Schüler ausfüllen müssen.

### **Sie initiiert keinen Austausch der Ideen in gemeinsamen Diskussionen (Partner/Gruppen/Plenum).**

Von Beginn an werden die Schülerinnen und Schüler nicht nach möglichen, vielleicht anderen Lösungswegen gefragt. Die Kinder nehmen hingegen zumeist zuhörend die geforderten und vorgezeichneten Wege auf und dürfen diese in Arbeitsphasen nachmachen. Diese Haltung ist unabhängig davon, ob die Kinder in Einzelarbeit Aufgaben und Probleme lösen oder in Partner- bzw. sogar Gruppenarbeit „zusammenarbeiten“. Die Freiheit der Bearbeitung der Aufgaben variiert höchstens in der Reihenfolge, in der die Schülerinnen und Schüler die gestellten Anforderungen abarbeiten, oder in der Auswahl von verschiedenen Arbeitsaufträgen, nicht jedoch im Lösungsweg, der durch das vorgemachte Schema geprägt ist.

Ein Austausch nach derartigen Arbeitsphasen findet nicht oder kaum statt. Im besten Fall dürfen die Kinder ihre Ergebnisse vortragen.

## Denkfreiheiten und Kommunikation im mittleren Bereich (3, 4, 5)

### **Der Lehrperson gelingt es manchmal, mehrere oder sogar alle Kinder kognitiv zu aktivieren.**

Es ist zu bemerken, dass die Lehrperson vor allem durch methodische Wechsel versucht, Gruppen gemeinsam anzusprechen oder auch zu gemeinsamen Arbeiten anzuhalten. Beispielsweise tritt bei der Vorstellung von Gruppenergebnissen die gesamte Gruppe gemeinsam vor dem Plenum auf.

In einigen Unterrichtsphasen zieht sich die Lehrperson zurück und verweist bei auftretenden Fragen auf die Möglichkeit, zunächst die Tischnachbarkinder oder die Tischgruppe zu befragen. Sie springt jedoch noch häufig helfend zur Seite und traut den Kindern nicht in letzter Autorität zu, Aktivitäten unter sich zu klären. Wenn sie z. B. bei einem Rundgang durch die Klasse ungewöhnliche oder ihr fremde Vorgehensweisen entdeckt, greift sie immer mal wieder ein, um den vermeintlichen Königsweg als gut gemeinte Alternative vorzuschlagen.

Ergebnisse und Lösungen werden ab und zu hinterfragt. Dabei wird entweder das vorstellende Kind gebeten, die Denk- und Vorgehensweise noch einmal zu erläutern, oder aber andere Kinder werden gefragt, ob sie den Ergebnissen folgen konnten. Vielfach bleibt jedoch ein Teil der Klassengemeinschaft in der passiv-zuhörenden Rolle.

### **Die Lehrperson bietet den Lernenden manchmal Gelegenheit, eigene Lösungswege zu suchen.**

Sie bemüht sich sichtlich, auch einmal verschiedene Herangehensweisen und Denkwege zuzulassen. Sie hat jedoch immer wieder den zumeist unbewussten Drang, die Art und Weise der Wege zu steuern und letztlich so besser zu kontrollieren. Die letzte Instanz bleibt oft dennoch der Weg, den die Lehrperson bewusst oder unbewusst favorisiert.

Die Offenheit selbstständiger Bearbeitungen wird phasenweise gewährt und manchmal als innovative und besondere Form des Vorgehens akzeptiert. Die Kinder sind dieses Vorgehen nicht in letzter Konsequenz gewohnt und trauen sich auch mitunter selbst nicht zu, neue Wege zu gehen. Sie verlassen sich nicht immer auf ihre Kreativität, sondern fordern auch von der Lehrperson nach einer gewissen Zeit *die* Lösung oder den besten Weg ein.

Dieser Versuchung erliegt die Lehrperson, je höher diese Dimension ausgebildet ist, immer weniger. Sie ermutigt die Kinder, eigenständig probierend tätig zu werden.

### **Sie initiiert ab und zu einen Austausch der Ideen in gemeinsamen, kritischen Diskussionen (Partner/Gruppen/Plenum).**

Zumeist zum Abschluss von eigenständigen Arbeitsphasen werden manchmal verschiedene Vorgehensweisen vorgestellt. Diese beschränken sich mitunter auf zwei Beispiele, die als besonders lohnenswert herausgestellt werden.

Die Bedeutung des Austausches kann an den eingeräumten Zeitfenstern abgelesen werden, die sich nicht nur auf die letzten fünf Minuten vor Stundenschluss beschränken sollten.

Eine tatsächlich konstruktiv-kritische Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Denkwegen und ausreichend Zeit für die Kommunikation der Vorstellung und Wertung gelingt in manchen Fällen. Sie weist dann in Einzelfällen auch über die schlichte Würdigung („Das fand ich gut.“) hinaus („Dieser Weg ist gut, weil ...“).

## Denkfreiheiten und Kommunikation im hohen Bereich (6, 7)

### **Der Lehrperson gelingt es häufig, alle Kinder kognitiv zu aktivieren.**

Der Unterricht ist durchweg davon geprägt, dass die Problemstellungen und Aufgaben von allen Kindern eigenständig und aktiv bearbeitet werden müssen. Es werden keine Rezepte des Vorgehens vorgegeben, sondern die Möglichkeiten werden immer von Seiten der Lernenden ausgehend entwickelt.

Die Lehrperson vertraut dabei auf zweierlei: Zum einen auf die Kreativität der Kinder, die einzeln, zu zweit oder auch in Gruppen Denkwege entdecken, und zum anderen auf den Aufforderungscharakter und die Funktion sinnvoller Aufgabenstellungen. Mechanisch zu lösende Vorgaben sind, wenn überhaupt angeboten, immer gepaart mit Möglichkeiten, die eigenen Wege zu gehen.

Hohes Aktivierungspotenzial haben zudem Fragen nach dem Besonderen oder dem Warum von mathematischen Zusammenhängen. Das schlichte Finden von Ergebniszahlen steht nicht im Mittelpunkt eines solchen Unterrichts. Vielmehr wird auch stets der Hintergrund der Zahlen, der Rechenoperationen etc. thematisiert.

### **Die Lehrperson bietet den Lernenden stets Gelegenheit, eigene Lösungswege zu suchen.**

Eigenständigkeit kann sich dabei auch im so genannten Frontalunterricht zeigen, der jedoch nicht als fragend-entwickelndes Unterrichtsgeschehen auftritt, sondern derart, dass alle Kinder ihr individuelles Vorgehen an bestimmten Aufgaben entwickeln. So bietet z. B. die Aufgabe „Finde Aufgaben mit der Lösung 100.“ ein breites Spektrum an Aktivierungspotenzial für alle Kinder. Diese können und dürfen dann Additionen ( $50+50$  oder auch  $37+63$ ), Subtraktionen und auch Multiplikationen entwickeln.

Die Kinder sind an ein solches Vorgehen gewöhnt und machen sich fast von allein an die Arbeit, wenn die Grundanforderung an sie geklärt wurde. Sie nutzen dabei ebenso die Möglichkeit, miteinander ins Gespräch zu kommen und die Tischnachbarkinder zu befragen. In der Vorstellung ihrer Denkansätze sind sie geübt und reden frei und sicher. Sie nutzen dabei auch die zur Verfügung stehenden Medien (Digitale oder grüne Tafel, Plakate etc.)

### **Sie initiiert immer einen regen Austausch der Ideen in gemeinsamen, kritischen Diskussionen (Partner/ Gruppen/ Plenum).**

Die Auseinandersetzung mit den individuellen Ideen ist ein zentraler Aspekt des Unterrichtsgeschehens. Es wird hierfür viel Zeit eingeplant und möglichst viele Kinder können ihre Wege den Mitschülerinnen und Mitschülern vorstellen.

Die Lösungswege werden auch selbst wiederum Anlass von Aufgaben. Die Kinder werden gezielt gebeten, *fremde* Wege nachzuvollziehen bzw. nachzugehen und ihre Vor- und Nachteile aufzuspüren.

Die Initiative zum Austausch gelingt ebenso durch Rituale der Gesprächskonferenzen in Kleingruppen. Kinder, die ihre Arbeit abgeschlossen haben und sich austauschen möchten, suchen sich in der Klasse selbstständig einen oder mehrere Gesprächspartner und beginnen auch ohne die Lehrperson einen intensiven Austausch ihrer Ideen.

Die Diskussion der Denkwege, ob im Plenum oder in kleineren Gruppen, ist dabei stets kritisch-konstruktiv. Die Kinder fragen nach und geben sich wechselseitig Hinweise auf Verständnisprobleme oder Irrwege. Sie akzeptieren diverse Vorgehensweisen und entwickeln erste Ansätze der Prüfung der Effizienz der Wege.

## Fehlerkultur / Leistungsbewertung

Umfasst den Umgang der Lehrperson mit Verstehensproblemen und Fehlantworten. Sie berücksichtigt dabei auch die Ausprägung und Intention von Rückmeldungen sowie die Abgrenzung zu Bewertungen.

Fehlerkultur / Leistungsbewertung	niedrig (1,2)	mittel (3,4,5)	hoch (6,7)
<ul style="list-style-type: none"> <li>Reaktion auf Fehler und Fehlvorstellungen</li> </ul>	<p>Die Lehrperson reagiert auf Fehler der Kinder mit Missfallen.</p>	<p>Der Lehrperson gelingt es manchmal, Fehler produktiv aufzugreifen und für bewertungsfreie Diskussionen zu nutzen.</p>	<p>Der Lehrperson gelingt es immer, Fehler produktiv aufzugreifen und für bewertungsfreie Diskussionen zu nutzen.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Beurteilungsmechanismen</li> </ul>	<p>Fehler werden durch Mechanismen des Abgleichs mit Lösungsvorgaben durch die Lehrperson (Musterlösung) oder durch das Lernmaterial aufgedeckt.</p>	<p>Fehler werden ab und zu im Diskurs mit den Kindern über die Gültigkeit der Ergebnisse und Lösungsvorschläge aufgedeckt.</p>	<p>Fehler werden stets im Diskurs mit den Kindern über die Gültigkeit der Ergebnisse und Lösungsvorschläge aufgedeckt.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Einbezug in individuelle Bewertung</li> </ul>	<p>Fehler werden von der Lehrperson in der Quantität bezüglich der Sozialnorm / des Klassenschnitts wahrgenommen und bewertet.</p>	<p>Fehler werden von der Lehrperson in einigen Fällen in Bezug zur individuellen Lernentwicklung eingeordnet.</p>	<p>Fehler werden von der Lehrperson grundsätzlich in Bezug zur individuellen Lernentwicklung eingeordnet.</p>

z. B. Grüßing & Peter-Koop, 2006; Hengartner, 1999; Treffers, 1983; Sundermann & Selter, 2021

## **Fehlerkultur und Leistungsbewertung im niedrigen Bereich (1, 2)**

### **Die Lehrperson reagiert auf Fehler der Kinder mit Missfallen.**

Sie macht sehr deutlich, dass es ihrer Ansicht nach nur eine Unterscheidung in falsch und richtig geben kann. Sie ermuntert die Kinder, die falsche Antworten gegeben haben, nicht, über die Lösung zu reflektieren und fragt auch nicht nach dem Denkweg, um eventuelle Irrtümer aufdecken zu helfen. Stattdessen wird ein Fehler sofort von ihr oder durch die Äußerung eines anderen Kindes korrigiert.

Die Kinder sind darauf bedacht, möglichst keine falschen Antworten zu geben. Auch unter den Kindern selbst wird deutlich, dass Fehler mit mehr oder weniger laut geäußertem Missfallen quittiert werden. Diese Äußerungen richten sich auch manchmal gegen die Person selbst, die vermeintlich häufig falsche Antworten gibt.

Wenn Kinder nach falschen Antworten von anderen sofort bereit sind, sich mit Meldung der richtigen Lösung hervorzutun, wird dies positiv zurückgemeldet und somit unterstützt. Ein gewisses Konkurrenzverhalten in diesem Sinne kann erfasst werden.

### **Fehler werden durch Mechanismen des Abgleichs mit Lösungsvorgaben durch die Lehrperson (Musterlösung) oder durch das Lernmaterial aufgedeckt.**

Eine Antwort wird immer durch die Lehrkraft selbst oder durch von ihr autorisiertes Material wie Lösungsfolien oder Korrekturblätter je mit vorgegebenen Lösungswegen oder nur den Ergebniszahlen bzw. Antwortsätzen bewertet. Dies kann bei Aufgaben im Schulbuch oder auf dem Arbeitsblatt auch durch ein Lösungswort oder eine Lösungszahl, die sich durch Verrechnen von Einzellösungen ergeben soll, erfolgen.

Die Kinder haben selbstständig keine Möglichkeit, die Richtigkeit von Antworten zu überprüfen und werden hierzu auch nicht ermutigt. Vielmehr verlassen sie sich auf das Urteil der Lehrperson bzw. auf die Passgenauigkeit mit dem Material (Farbe, Wort oder Zahl stimmen überein).

### **Fehler werden von der Lehrperson in der Quantität bezüglich der Sozialnorm / des Klassenschnitts wahrgenommen und bewertet.**

Dies zeigt sich dadurch, dass die Lehrperson einzelne Kinder ziemlich deutlich als schwache oder starke Leistungsträger in Mathematik kenntlich macht. Insbesondere durch das Herausstellen der guten Leistungen von einzelnen Kindern („Fragen wir mal ..., die weiß immer die richtige Antwort.“) und die Ungeduld mit Schülerinnen und Schülern, die sich mit den vermeintlich richtigen Antworten schwer tun, werden die Einschätzungen der Lehrkraft deutlich.

Die Kinder reagieren auf diese Selektionen, je nachdem in welcher Gruppe sie verortet werden, entweder mit Stolz und öffentlich gezeigtem Hochmut oder aber mit großer Schüchternheit und Zurückhaltung.

Wenn ein Kind mehrmals hintereinander falsche oder nicht gewünschte Antworten gibt, ist es mitunter auch an der Mimik der Lehrperson oder der anderen Kinder abzulesen, dass von diesem Kind auch nicht wirklich etwas Anderes erwartet wurde. Die Stigmatisierung äußert sich u.U. auch darin, dass die Lehrperson diesen Kindern dann andere Aufgaben oder sogar öffentlich kenntlich gemachte „einfachere“ Aufgaben anbietet.

## **Fehlerkultur und Leistungsbewertung im mittleren Bereich (3, 4, 5)**

### **Der Lehrperson gelingt es manchmal, Fehler produktiv aufzugreifen und für bewertungsfreie Diskussionen zu nutzen.**

Wenn die Kinder ihre Ergebnisse vorstellen, begnügt sich die Lehrperson manchmal nicht allein mit Zahlen oder Antwortsätzen, sondern sie fragt auch nach dem Lösungsweg. Dies insbesondere, wenn die Ergebnisse nicht dem entsprechen, was erwartet wurde. Sie versucht dann ab und zu mit dem Kind oder mit allen gemeinsam dem Irrweg oder Umweg auf die Spur zu kommen. Dabei lässt sie den Kindern ein wenig Zeit, um sich Gedanken zu machen und die Fehler auch selbst aufzudecken.

Die Lehrperson unterscheidet dabei manchmal nach Fehlern, die sich auf bereits lang erlerntes Grundwissen beziehen und solchen, die in den neu eroberten Themenfeldern auftreten. So toleriert sie in einem zweiten Schuljahr einfache Additionsfehler im Zahlenraum bis 20 nicht („Das müsstest du aber können.“), akzeptiert aber in einigen Fällen, wenn die Lösungen bei Additionen im 100er-Raum nicht sofort im Kopf gelöst werden oder Einmaleinsaufgaben noch nicht automatisiert wurden.

### **Fehler werden ab und zu im Diskurs mit den Kindern über die Gültigkeit der Ergebnisse und Lösungsvorschläge aufgedeckt.**

In machen Fällen vermeidet die Lehrperson die Bewertung von Antworten und gibt die Ideen an die Kinder zurück, die gemeinsam herausfinden müssen, ob die Antworten auch möglich oder doch falsch sind.

Sie versucht zunehmend darauf zu achten, dass der Diskurs angstfrei und offen geführt wird und ermahnt auch die Kinder manchmal dazu, nicht voreilig mit der richtigen Lösung herauszuplatzen, sondern eher verständnisvoll auf die Umwege und anderen Denkansätze des vortragenden Kindes einzugehen.

Dabei wird vor allem der Weg und nicht nur das Ziel, also das Ergebnis, thematisiert. Mitunter gelingt so auch der langsame Aufbau eines Verständnisses dafür, dass verschiedene Wege und eventuell sogar verschiedene Antworten richtig sein können.

Die Kinder agieren in diesen Unterrichtsphasen offen und ohne Hemmungen, auch vermeintlich falsche Antworten zu geben.

### **Fehler werden von der Lehrperson in einigen Fällen in Bezug zur individuellen Lernentwicklung eingeordnet.**

Es zeigt sich, dass die Lehrperson ab und zu differenziert auf vermeintlich falsche Antworten eingeht. Sie lobt Kinder unter Umständen auch bei richtigen Lösungsansätzen, die noch nicht ganz zum richtigen Ziel geführt haben. Andere Kinder, denen sie ein höheres Leistungspotential zutraut, fordert sie manchmal gezielt auf, ihre Lösungen nicht nur zu berichten, sondern auch zu erklären oder zu begründen.

Die Lehrperson bemüht sich, die Fähigkeiten der Kinder im Vordergrund zu sehen. Manchmal verstrickt sie sich jedoch in die traditionell defizitorientierte Sicht und bespricht nur die Fehler, anstatt die Stärken des einzelnen Kindes hervorzuheben.

## **Fehlerkultur und Leistungsbewertung im hohen Bereich (6, 7)**

**Der Lehrperson gelingt es immer, Fehler produktiv aufzugreifen und für bewertungsfreie Diskussionen zu nutzen.**

Es ist allen Beteiligten klar, dass es nicht immer nur eine richtige Lösung geben muss. Weder die Kinder noch die Lehrperson gibt sich mit schlichten Einwort-Antworten zufrieden. Es wird stets der Hintergrund der Lösung erfragt. Dies gilt insbesondere bei überraschenden oder vermeintlich falschen Lösungen.

Die Kinder wissen, dass sie ganz offen ihr Vorgehen vorstellen dürfen und die Lehrperson sich soweit möglich aus den Diskussionen über die Lösungen zurückhält. Die gesamte Atmosphäre beruht auf der so genannten kompetenzorientierten Sicht, die jeweils die Stärken eines Kindes in den Mittelpunkt und an diese anknüpfend Anforderungen und Erwartungen stellt.

**Fehler werden stets im Diskurs mit den Kindern über die Gültigkeit der Ergebnisse und Lösungsvorschläge aufgedeckt.**

Die Kinder sind geübt darin, die Umwege der anderen Kinder zu identifizieren und nicht bevormundend, sondern empathisch mit den anderen Kindern Denkanstöße weiter zu verfolgen.

Dabei ergeben sich manchmal umständliche, aber richtige Lösungen, die in ihren Vor- und Nachteilen von den Kindern in Moderation der Lehrperson besprochen werden. Auch Fehllösungen und Irrwege werden so aufgedeckt und gemeinsam korrigiert. Es ist dabei fast unerheblich, wer diese Lösungsvorschläge gemacht hat, da die sachliche Diskussion der Vorschläge im Vordergrund steht.

**Fehler werden von der Lehrperson grundsätzlich in Bezug zur individuellen Lernentwicklung eingeordnet.**

Die Lehrperson achtet nicht auf die Quantität der richtigen Lösungen, sondern beurteilt in ihren Äußerungen die Qualität bezüglich des von ihr erwarteten Potenzials des Kindes.

Auch die Schülerinnen und Schüler selbst stecken sich diese Lernziele und erarbeiten ehrgeizig die eigenen, nächsten Schritte. Sie fordern z. B. von sich aus mehr Übungen in einem bestimmten Bereich ein, der von ihnen selbst als noch ausbaufähig erkannt wurde oder über den sie noch mehr erfahren möchten.

Zu den wichtigen Aspekten der Einordnung von Leistungen zählen neben Lösungen ebenso die Präsentation und die Kommunikation der Lösungen. Dies wird gleichermaßen bei den konstruktiven, individuellen Rückmeldungen der Lehrperson oder auch der anderen Kinder deutlich.

## Ziele / Zieltransparenz

Spiegelt die Ausprägung von Vernetzungsgedanken und die Nutzung von Sinnzusammenhängen inner- und außerfachlich wider, die sich in Prozess- und Inhaltszielen darstellen. Zusätzlich beinhaltet diese Dimension die in den Lehr-Lernsituationen genutzte Transparenz dieser Ziele.

Ziele / Zieltransparenz	niedrig (1,2)	mittel (3,4,5)	hoch (6,7)
<ul style="list-style-type: none"> <li>Inhalts- und Prozessziele</li> </ul>	Die Lehrperson verfolgt durchgängig kleinschrittige, segmentierte Inhaltsziele (Teillernziele).	Der Lehrperson gelingt es manchmal, inhaltliche Ziele mit allgemeinen Prozesszielen zu verbinden.	Die Lehrperson verbindet immer inhaltliche Ziele mit allgemeinen Prozesszielen.
<ul style="list-style-type: none"> <li>Stiftung von Sinnzusammenhängen</li> </ul>	Sie stiftet keine Sinnzusammenhänge dieser Inhalte innerhalb oder außerhalb der Mathematik bzw. im Lernprozess.	Die Lehrperson zeigt den Lernenden in einzelnen Fällen Sinnzusammenhänge der Inhalte innerhalb oder außerhalb der Mathematik bzw. im Lernprozess auf.	Die Lehrperson zeigt den Lernenden stets Sinnzusammenhänge der Inhalte innerhalb oder außerhalb der Mathematik bzw. im Lernprozess auf.
<ul style="list-style-type: none"> <li>Transparenz der Ziele</li> </ul>	Die Lehrperson ermöglicht es nicht, dass die Ziele des Unterrichts bzw. der Unterrichtsphasen den Kindern transparent werden.	Die Lehrperson achtet ab und zu darauf, dass die Ziele des Unterrichts bzw. der Unterrichtsphasen den Kindern transparent werden.	Die Lehrperson versteht es, die Ziele des Unterrichts bzw. der Unterrichtsphasen den Kindern durchweg transparent zu machen.

z. B. Bruner 1970; Dewey, 1976; Freudenthal, 1982; Kühnel, 1922; Schipper, 2009; Winter, 2016; Wittmann & Müller, 2017 & 2018

## Ziele und Zieltransparenz im niedrigen Bereich (1, 2)

### **Die Lehrperson verfolgt durchgängig kleinschrittige, segmentierte Inhaltsziele (Teillernziele).**

In jeder Unterrichtsphase hat die Lehrperson das offensichtliche Bedürfnis, ein ganz bestimmtes Teilziel zu verfolgen und dies für alle zunächst zum Abschluss zu bringen, bevor sie die nächsten Aufgabentypen oder Anforderungen angehen lässt.

Sie besteht darauf, dass dieser kleine Inhaltsbereich „sitzt“ und organisiert deshalb auch innerhalb einer Stunde oft Zwischenphasen, in denen alle noch einmal darlegen, was sie gerade gelernt haben.

Ein Voranschreiten in der Thematik wird nur zusammen und gleichzeitig genehmigt, sodass die Stunde oft Warteschleifen für die „Schnellen“ aufweist.

### **Sie stiftet keine Sinnzusammenhänge dieser Inhalte innerhalb oder außerhalb der Mathematik bzw. im Lernprozess.**

Authentische Kontexte, die in Beziehung zu den Inhalten stehen könnten, werden nicht gesucht. Selbst bei Sachaufgaben lässt sich die Lehrperson nicht auf Gespräche über die Sache selbst ein (Tiere, Einkaufen etc.), sondern nutzt im Tenor der Schulbuchvorgaben allein die vermutete Motivation aufgrund der oft sehr stark verkürzten und vereinfachten Handlungsgeschichte oder der Bilder.

Ebenso werden von der Lehrperson innermathematische Zusammenhänge nicht verdeutlicht – weder zu bereits erlernten Inhalten (z. B. Beziehungen zu Inhalten aus dem Schuljahr davor) noch zu zukünftigen Inhalten. Rückbezüge und Vorgriffe, die die Kinder von sich aus äußern, werden nicht aufgegriffen oder sogar getadelt („Sowas können wir noch nicht.“).

### **Die Lehrperson ermöglicht es nicht, dass die Ziele des Unterrichts bzw. der Unterrichtsphasen den Kindern transparent werden.**

Die Teilziele der Stunde sind aus der Sicht von Erwachsenen mitunter in größere Zusammenhänge einzuordnen, die Kinder jedoch werden in diese Beziehungen nicht eingeweiht.

Im Gegenteil wird das mathematische Ziel oft verschleiert durch eine mehr oder weniger glaubhafte Kontextgeschichte, die auf vermeintlich kindgemäße Vorlieben eingeht („Ein Würfelkönig baut eine Stadt“, „Die 5 feiert Geburtstag“ etc.) Der Aufbau der Stunde gleicht manchmal der Inszenierung eines Krimis, bei dem, wenn überhaupt, erst ganz am Schluss klar wird, was denn das Ziel der ganzen Einzelaufgaben war. Wenn ein Kind die Zusammenhänge durchschaut und schon in den ersten Minuten mit diesem Ziel herausplatzt, reagiert die Lehrperson oft leicht verärgert und weist das Kind in die Schranken („Psst! Du musst doch nicht alles verraten.“).

Die Kinder tappen manchmal in die Falle und äußern sich zu den präsentierten Kontexten – dies ist jedoch weder gewünscht noch hilft es, die Inhalte der Stunde mit bereits erworbenem Wissen zu vernetzen. Diese Fehlleitung durch Rahmengeschichten oder präsentierte Materialien kann vor allem in offenen Kreisgesprächen deutlich werden, wo die Kinder in ihren Beiträgen wild raten, was denn an Antworten gewünscht ist. Zumeist wartet die Lehrkraft auf eine ganz bestimmte, von ihr vorgeplante Äußerung, die dann das Raten und das gesamte Gespräch beendet („Genau das wollen wir jetzt lernen.“).

## **Ziele und Zieltransparenz im mittleren Bereich (3, 4, 5)**

**Der Lehrperson gelingt es manchmal, inhaltliche Ziele mit allgemeinen Prozesszielen zu verbinden.**

In den meisten Unterrichtsphasen verfolgt die Lehrperson eindeutig inhaltliche Ziele (Geometrische Formen benennen, Einmaleins beherrschen, etc.). In einigen Fällen zeigt sich jedoch, dass auch Prozessziele, wie z. B. Probleme zu lösen oder zu kommunizieren nebenläufig mit bedacht werden.

Je höher diese Dimension ausgebildet ist, umso häufiger nutzt die Lehrkraft Problemstellungen, die Prozessziele integrieren, wie z. B. Aufgaben, die auch zur Kreativität auffordern oder aber Sachverhalte aus der Alltagswelt einbeziehen.

Die Lehrkraft fordert manchmal nur einzelne Schülerinnen und Schüler oder Gruppen dazu auf, diese Prozessziele zu verfolgen. Bei anderen Gruppen begnügt sie sich mit dem schlichten Ermitteln von Lösungen (Kenntnisse und Fertigkeiten).

**Die Lehrperson zeigt den Lernenden in einzelnen Fällen Sinnzusammenhänge der Inhalte innerhalb oder außerhalb der Mathematik bzw. im Lernprozess auf.**

Bei einigen Unterrichtsphasen gelingt es der Lehrperson, die Zusammenhänge zu bereits erlernten Inhalten oder zukünftigen Themen darzulegen. Dieses Mittel benutzt sie jedoch noch nicht durchgängig. Manchmal lässt sie Sinnfragen offen und reagiert auch auf derartige Bitten der Kinder nicht oder eher abweisend.

Manchmal möchte sie auch fächerübergreifende Aspekte und Alltagsbezüge (authentische Kontexte) verdeutlichen. Diese Ideen sind jedoch zumeist nur temporär und werden nicht in aller Konsequenz verfolgt. Insbesondere bei Einführungsphasen sind diese Anbindungen jedoch ein wichtiger Bestandteil der Hinführung zu einem Thema. Sie nutzt eher selten konstruierte Rahmengeschichten, sondern bevorzugt zunehmend authentische Daten und Angaben (Flyer vom Zoo, Abfahrtspläne vom Schulbus etc.).

**Die Lehrperson achtet ab und zu darauf, dass die Ziele des Unterrichts bzw. der Unterrichtsphasen den Kindern transparent werden.**

Die Lehrperson versucht den Kindern deutlich zu machen, um welche Themen und Lernziele es ihr in den Unterrichtsphasen geht. Sie scheut sich jedoch manchmal noch, diese explizit zu benennen und wartet eher auf derartige Hinweise von den Kindern selbst.

Wenn Kinder die Ziele benennen, greift sie diesen Impuls durchaus erfreut auf und verstärkt die Erkenntnis durch Zustimmung. Die inhaltlichen Ziele sind ihr dabei vielfach noch wichtiger als die Prozessziele, die sich in der Art und Weise der Aneignung dieser Inhalte ausdrücken.

## **Ziele und Zieltransparenz im hohen Bereich (6, 7)**

### **Die Lehrperson verbindet immer inhaltliche Ziele mit allgemeinen Prozesszielen.**

Zu jedem Zeitpunkt verdeutlicht die Lehrperson durch die gestellten Anforderungen, dass sie neben den Inhalten (Addieren im 100er-Raum, Kenntnisse über Quadrate und Rechtecke, Wissen über Meter und Zentimeter etc.) auch allgemeine Ziele in den Blick nimmt.

Das heißt sie achtet auf die Möglichkeit, kreativ zu werden, mit anderen über Ideen zu kommunizieren oder auch kritisch zu argumentieren. Sie erwartet den sinnvollen Einsatz von Darstellungen und ebenso das Lesen und Deuten von Darstellungen, die sie in den Problemstellungen anbietet.

Bei Aufgaben mit Sachkontexten ist ihr neben der mathematischen Bearbeitung auch das Verständnis der gegebenen Sache selbst sehr wichtig (Was bedeutet es Wechselgeld zurück zu bekommen? Wie groß wird eine Fledermaus in Wirklichkeit? etc.). Gespräche über die Kontexte werden aufgegriffen und Vernetzungen zu anderen Fächern (Sachkunde, Deutsch etc.) aufgebaut.

### **Die Lehrperson zeigt den Lernenden stets Sinnzusammenhänge der Inhalte innerhalb oder außerhalb der Mathematik bzw. im Lernprozess auf.**

Es liegt der Lehrperson sehr daran, dass die Kinder ihr bereits vorhandenes Wissen mit den gerade diskutierten Inhalten vernetzen. Sie arrangiert deshalb innerhalb der Aufgaben oder im Gespräch Rückbezüge zu vergangenen Inhalten („Kennt ihr das noch aus ...?“) und gibt auch Ausblicke auf zukünftige Inhaltsbereiche („Das werden wir im 4. Schuljahr brauchen, wenn wir ...“).

Ebenso verankert sie die Themen auch im Alltagswissen und Handeln der Kinder (authentische Kontexte). Sie beschreibt, wofür man diesen oder jenen Inhalt benutzen kann und ermuntert auch die Kinder, solche Zusammenhänge aufzuzeigen. Dabei sind ihr außermathematische Beziehungen immer in der authentischen Form wichtig (Mathematik aus der Zeitung, Aufgabenanlässe bei aktuellen Ereignissen z. B. im Sport etc.)

### **Die Lehrperson versteht es, die Ziele des Unterrichts bzw. der Unterrichtsphasen den Kindern durchweg transparent zu machen.**

Sie äußert diese Ziele durchaus wörtlich und gibt den Kindern in jeder Unterrichtsphase die Möglichkeit, genau zu wissen, auf was es ankommt.

Dabei achtet sie darauf, dass auch die Kinder zielgerichtet arbeiten und sich bewusst mit Inhalten oder allgemeinen Prozessanforderungen auseinandersetzen. Sie moderiert somit das Unterrichtsgeschehen, indem sie z. B. darauf hinweist, wie fruchtbar der Austausch von Argumenten gerade verläuft und dass dies ein wichtiges Lernziel ist oder wie bedeutsam die Darstellung von Ergebnissen in Anschauungsmaterialien, Tabellen etc. sein kann.

Wenn die Kinder von sich aus die Themen und Prozesse benennen, die ihnen als Ziele des Unterrichts deutlich werden, so ist die Lehrperson hoch erfreut und unterstützt diese reflexive Haltung gegenüber den eigenen Handlungen.

## Übersicht der theoretischen Verankerung

Die Dimensionen bilden die aktuellen Ansätze fachdidaktischer Theorien ebenso ab wie die normativen Forderungen der Bildungsstandard des Mathematikunterrichts in der Grundschule.

vgl. Literatur bzw. auch:

Steinweg, Anna Susanne (2011). Einschätzung der Qualität von Lehr-Lernsituationen im mathematischen Anfangsunterricht - ein Vorschlag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(1), 1–26.

Dimension	Theoretische Verankerung
<p><b>Aufgabenqualität / Problemstellungen</b> Spiegelt die Anforderungsmerkmale der angebotenen Aufgaben und Problemstellungen unter Berücksichtigung des Kognitionsniveaus und den daraus resultierenden Lernchancen wider.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fachdiskussion der „Aufgabekultur“ in Bezug auf Anforderungsbereiche der Bildungsstandards</li> <li>• Mathematik als qualitatives „Mehr als Rechnen“</li> <li>• Prozessziel „Probleme mathematisch lösen“</li> <li>• Fördern durch Fordern / Aktivierung der Zone der nächsten Entwicklung</li> </ul>
<p><b>Anschauung / Mentale Bilder</b> Verdeutlicht den Einsatz und die Motive der Auswahl von didaktischem Material oder Abbildungen sowie die Wertschätzung der Ausbildung mentaler Bilder und Grundvorstellungen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler in mathematischen Lehr-Lernsituationen.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Repräsentation von mathematischen Wissen in tragfähigen Grundvorstellungen und mentalen Objekten</li> <li>• Entwicklung von Bewusstheit</li> <li>• Prozessziel „mathematisch darstellen“</li> <li>• Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen / Umgang mit abstrakten Objekten</li> </ul>
<p><b>Denkfreiheiten / Kommunikation</b> Erfasst die zur Verfügung gestellte individuelle Freiheit und Tiefe der Auseinandersetzung sowie das Ausmaß der geistigen Aktivierung der Schülerinnen und Schüler innerhalb des Mathematikunterrichts. Sie umschließt dabei auch das Ausmaß der ernsthaften Kommunikation über verschiedene Lösungs- und Denkwege in bewusst gestalteten Phasen des Unterrichts.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Produktive Aufgabenformate</li> <li>• „Eigenproduktionen“</li> <li>• Öffnung der Lösungswege</li> <li>• Natürliche Differenzierung</li> <li>• Prozessziele „mathematisch kommunizieren“ und „mathematisch argumentieren“</li> <li>• Abkehr von ergebnisorientierter Sicht</li> <li>• Mathematik als prozessorientierte Auseinandersetzung</li> </ul>

<p><b>Fehlerkultur / Leistungsbewertung</b></p> <p>Umfasst den Umgang der Lehrperson mit Verstehensproblemen und Fehlantworten. Sie berücksichtigt dabei auch die Ausprägung und Intention von Rückmeldungen sowie die Abgrenzung zu Bewertungen.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fachdiskussion der „Fehlerkultur“</li> <li>• Relativierung von normativen Bezugsnormen</li> <li>• Beachtung individueller Bezugsnormen</li> <li>• Orientierung am Vorwissen</li> <li>• Vertrauen auf Prinzip der fortschreitenden Schematisierung</li> <li>• Prozessziel „mathematisch argumentieren“</li> </ul>
<p><b>Ziele / Zieltransparenz</b></p> <p>Spiegelt die Ausprägung von Vernetzungsgedanken und die Nutzung von Sinnzusammenhängen inner- und außerfachlich wider, die sich in Prozess- und Inhaltszielen darstellen. Zusätzlich beinhaltet diese Dimension die in den Lehr-Lernsituationen genutzte Transparenz dieser Ziele.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Abkehr von der Methodik der kleinen (hierarchischen) Schritte</li> <li>• Lernen in Sinnzusammenhängen</li> <li>• Sachbezogene Motivation an Grundideen bei außermathematischen Zusammenhängen: Prozessziel „mathematisch modellieren“</li> <li>• Mathematik als aktiv-entdeckende Wissenschaft der Muster und Strukturen innermathematische Zusammenhänge: Strukturorientierung</li> <li>• Abkehr von „kindgemäßen“ Einkleidungen einer vermeintlichen „Geheimwissenschaft“</li> <li>• Spiralprinzip der wiederkehrenden Themenbereiche</li> </ul>

## Beobachtungsbogen Mathematik

Lehrperson:		Beobachtung:						
Datum:		Zyklus:						
Startzeit:		Ende:						
Anzahl der Erwachsenen:		Anzahl der Kinder:						
<b>Aufgabenqualität/ Problemstellungen</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kognitive Herausforderung</li> <li>• Möglichkeiten zur Entdeckung von Zusammenhängen</li> <li>• Bedeutung der Sicherung von Grundwissen und Routinen (Üben)</li> </ul>	Notizen	1 2 3 4 5 6 7						
		<b>Anschauung/ Mentale Bilder</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Angebot von Anschauungsmitteln</li> <li>• Auswahl der Anschauungsmittel</li> <li>• Ausbildung von Grundvorstellungen</li> </ul>	Notizen	1 2 3 4 5 6 7				
<b>Denkfreiheiten/ Kommunikation</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kognitive Aktivierung</li> <li>• Individuelle Denkwege</li> <li>• (fachliche) Diskussion von Lösungswegen</li> </ul>	Notizen			1 2 3 4 5 6 7				
		<b>Fehlerkultur/ Leistungsbewertung</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reaktion auf Fehler und Fehlvorstellungen</li> <li>• Beurteilungsmechanismen</li> <li>• Einbezug in individuelle Bewertung</li> </ul>	Notizen	1 2 3 4 5 6 7				
<b>Ziele/ Zieltransparenz</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Inhalts- und Prozessziele</li> <li>• Stiftung von Sinnzusammenhängen</li> <li>• Transparenz der Ziele</li> </ul>	Notizen			1 2 3 4 5 6 7				

Ergänzende Hinweise:

## Literatur: Auswahl und Leseanregungen

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld et al. (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Aulis.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort. Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften*, 9(4), 469–520.
- Becker, G. E. (2007). *Unterricht auswerten und beurteilen*. Beltz.
- Birkel, P. (2005). Beurteilungsübereinstimmung bei Mathematikarbeiten? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 28(1), 28–51.
- Blömeke, S. & Müller, C. (2008). Zum Zusammenhang von Allgemeiner Didaktik und Lehr-Lernforschung im Unterrichtsgeschehen. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(Sonderheft 10), 239–258.
- Blömeke, S., Risse, J., Müller, C., Eicheler, D. & Schulz, W. (2006). Analyse der Qualität von Aufgaben aus didaktischer und fachlicher Sicht. *Unterrichtswissenschaft*, 34(4), 330–357.
- Blum, W., Drüke-Noe, Ch., Leiß, D., & Weigand, B. (2005). Unterrichtsqualität durch Bildungsstandards: Utopie oder Wirklichkeit. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 99–102). Franzbecker.
- Bruner, J. (1970). *Der Prozeß der Erziehung*. Cornelsen.
- Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Cornelsen.
- Clausen, M., Reusser, K. & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualität auf der Basis hoch-inferenter Unterrichtsbeurteilungen. *Schweiz. Unterrichtswissenschaft*, 31(2), 122–141.
- Clements, D., Sarama, J., & DiBiase, A. (2004). *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum.
- Dewey, J. (1976). Das Kind und die Fächer. In J. Dewey (Hrsg.), *The Middle Works 1899-1924* (S. 1–13). Southern Illinois University Press.
- Freudenthal, H. (1971) Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3(3-4), 413–435. <https://doi.org/10.1007/BF00302305>
- Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. *Grundschule*, 14(4), 140–142.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel / Kluwer.
- Gallin, P. & Ruf, U. (2000). *Sprache und Mathematik*. Klett und Balmer.
- Goffree, F. & Dolk, M. (1995). Standards for Mathematics Education. SLO/NVORWO <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/1063.pdf>
- Götze, D. (2007). *Mathematische Gespräche unter Kindern*. Franzbecker.
- Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (Hrsg.) (2006). *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren*. Mildenerger.
- Hasemann, K. & Stern, E. (2002). Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben - Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematikdidaktik*, 23(3), 222-242.
- Hasemann, K. (2003). *Anfangsunterricht Mathematik*. Heidelberg, Springer Spektrum.
- Helmke, A. (2001). *Unterrichtsqualität – Unterrichtseffekte*. Folien zum Referat bei der Tagung der Netzwerkkoordinator/inn/en im BLK-Programm SINUS am 12.02.01 in Dillingen.
- Helmke, A. (2006). Was wissen wir über guten Unterricht? *Pädagogik*, 58(2), 42–45.
- Hengartner, E. (1999). Standorte und Denkwege erkunden. In ders. (Hrsg.), *Mit Kindern lernen* (S. 12–17). Klett & Balmer.

- Heuvel-Panhuizen, M. van den (2001). *Children Learn Mathematics – A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate and Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School*. Freudenthal Institute.
- Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Springer Spektrum.
- Hofe, R. vom (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, (118), 4–8.
- Hosenfeld, A., Helmke, A., Heyne, N. & Lipowsky, F. (2008). Praxisworkshop. Videostudien in der empirischen Unterrichtsforschung. In K. Möller, P. Hanke, Ch. Beinbrech, A. Hein, T. Kleickmann & R. Schages (Hrsg.) *Qualität von Grundschulunterricht entwickeln, erfassen und bewerten* (S. 305–311). VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Jentsch, A., Schlesinger, L., Heinrichs, H., Kaiser, G., König, J. & Blömeke, S. (2021). Erfassung der fachspezifischen Qualität von Mathematikunterricht: Faktorenstruktur und Zusammenhänge zur professionellen Kompetenz von Mathematiklehrpersonen. *Journal für Mathematikdidaktik*, 42(1), 97–121. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00168-x>
- Kleine, M. (2007). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Journal für Mathematikdidaktik*, 28(2), 171–172.
- Klieme, E. & Reusser, K. (2003). Unterrichtsqualität und mathematisches Verständnis im internationalen Vergleich – Ein Forschungsprojekt und erste Schritte zur Realisierung. *Unterrichtswissenschaft*, 31(3), 194–205.
- KMK (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik Primarbereich*, (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022). <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>
- Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. & Löwen, K. (2004) COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.) *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (S. 31–53). Waxmann.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. 3. Auflage. Springer.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule*. [http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material\\_aus\\_SGS/Handreichung\\_Krauthausen-Scherer.pdf](http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf)
- Krauthausen, G. (1995). Zahlenmauern im zweiten Schuljahr – ein substantielles Übungsformat. *Grundschulunterricht*, 42(10), 5–9.
- Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Leske+Budrich.
- Kühnel, J. (1916). *Neubau des Rechenunterrichts*. Klinkhardt.
- Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011) *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Waxmann.
- Lee, S., Ginsburg, H. & Preston, M. (2007) Analyzing Videos to Learn to Think Like an Expert Teacher. *Beyond the Journal: Young Children on the Web*. <http://www.naeyc.org/files/yc/file/200707/Lee.pdf>
- Lorenz, J. H. & Schipper, W. (Hrsg.) (2007). *Hendrik Radatz – Impulse für den Mathematikunterricht*. Schroedel.
- Lorenz, J. H. (1992). *Anschaung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht: Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung* (1. Aufl.). Hogrefe.
- Lorenz, J. H. (2007). Die Funktion von Veranschaulichungsmitteln – Hilfe zur Entwicklung von Zahlbeziehungen und arithmetischen Operationen? In J. Lorenz & W. Schipper (Hrsg.), *Hendrik Radatz – Impulse für den Mathematikunterricht* (S. 56–62). Schroedel.

- Marx, A. & Selter, Ch. (2010). PIK AS - Ein Projekt zur Unterstützung der Unterrichtsentwicklung. In A. Lindmeier & St. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 585–588). WTM-Verlag.
- Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewußtheit Einfluß nehmen. *mathematik lehren*, (21), 4–5.
- Meyer, H. (2009). *Was ist guter Unterricht?* Cornelsen.
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. <http://standards.nctm.org/>
- Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen: Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Münster: Waxmann.
- Pianta, R. C., La Paro, K. M. & Hamre, B. K. (2008). *Classroom Assessment Scoring System*. Paul H Brookes Publishing.
- Plackner, E. (2008). Vorwissen zu geometrischen Begriffen aufspüren – eine explorative Studie in der Grundschule. In E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008* (S. 641–644). Franzbecker.
- Radatz, H., Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht – Schuljahr 1*. Schroedel.
- Radatz, H., Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht – Schuljahr 2*. Schroedel.
- Revuz, André (1980). Ist es unmöglich, Mathematik zu unterrichten? (Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?). Paris: Presses Universitaires de France, 136–144.
- Ruwisch, S. & Peter-Koop, A. (2003). *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Mildener Verlag.
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.
- Schoenfeld, A. H. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. <http://map.mathshell.org/trumath.php>
- Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule*. Oldenbourg.
- Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht*. Franzbecker.
- Schwippert, K., Kasper, D., Köller, O., McElvany, N., Selter, C., Steffensky, M. & Wendt, H. (Hrsg.) (2020). TIMSS 2019: Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich. Waxmann.
- Selter, C. & Spiegel, H. (2003). *Kinder und Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Kallmeyer.
- Selter, C. & Sundermann, B. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht*. CVK.
- Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr*. Deutscher Universitätsverlag.
- Selter, C. (1995). Zur Fiktivität der ‚Stunde Null‘ im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis*, II. Quartal, 11–19.
- Selter, C. (1997). *Schulpädagogik und Fachdidaktik. Zur Aktualität des Werks von Johannes Kühnel*. Brockmeyer.
- Selter, C. (2017). *Guter Mathematikunterricht*. Cornelsen.
- Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern*. Franzbecker.
- Spiegel, H. (1992). Was und wie Kinder zu Schulbeginn schon rechnen können. *Grundschulunterricht*, 39 (11), 21–23.
- Steinbring, H. (1995). Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da! – Wie Kinder im Arithmetikunterricht strategisch-strukturelle Vorgehensweisen entwickeln. In G. Müller & E. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 225–239). Grundschulverband e. V.

- Steinbring, H. (2005). Analyzing Mathematical Teaching-Learning Situations – The Interplay of Communicational and Epistemological Constraints. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 313–324.
- Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. LIT.
- Steinweg, A. S. (2004). Zahlen in Beziehungen – Muster erkennen, nutzen, erklären und erfinden. In P. Scherer & D. Bönig (Hrsg.), *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern* (S. 232–242). Grundschulverband e.V.
- Steinweg, A. S. (2005a). Über Mathematik sprechen - Rechenaufgaben, die zum Argumentieren einladen. *Sache-Wort-Zahl*, 33(69), 42–47.
- Steinweg, A. S. (2005b). Arithmetik ist mehr als Ausrechnen. *Grundschulunterricht*. (7/8), 15–17.
- Steinweg, A. S. (2006). Gute Aufgaben. Kompetenzen für die Aufgabenauswahl und Beurteilung im Mathematikunterricht entwickeln. *Grundschulmagazin*, 74(2), 8–11.
- Steinweg, A. S. (2006). Gute Aufgaben. Kompetenzen für die Aufgabenauswahl und Beurteilung im Mathematikunterricht entwickeln. *Grundschulmagazin*, 74(2), 8–11.
- Steinweg, A. S. (2007). Mathematisches Lernen. In Stiftung Bildungspakt Bayern (Hrsg.) *Das KIDZ-Handbuch* (S. 136–203). Wolters Kluwer.
- Steinweg, A. S. (2011). Einschätzung der Qualität von Lehr-Lernsituationen im mathematischen Anfangsunterricht: Ein Vorschlag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(1), 1–26.
- Steinweg, A. S. (2013). Herausforderungen an den Mathematikunterricht der Grundschule. In H. Deckert-Peaceman & A. Seifert (Hrsg.), *Die Grundschule als Ort grundlegender Bildung? Neuverortung der Grundschulpädagogik in einer veränderten Bildungslandschaft* (S. 132–144). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Steinweg, A. S. (2020a). Muster und Strukturen: Anschlussfähige Mathematik von Anfang an. In H. Siller, W. Weigel & J. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 39–46). Münster: WTM-Verlag.
- Steinweg, A. S. (2020b). Zukunfts-Mathematik: Muster und mathematische Strukturen als Tür zu wesentlichen Fähigkeiten. *Grundschulmagazin*, 88(1), 7–11.
- Steinweg, A. S. (2008). Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt – Zur Attraktivität von Zahlen und Mustern. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 56–74). Mildenerger Verlag.
- Sundermann, B. & Selter, C. (2021). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule*. <https://proprima.dzlm.de/sites/proprima/files/uploads/buch/beurteilen-und-foerdern.pdf>
- Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung. *mathematik lehren*, (1), 16–20.
- Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J.H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 147–166). Aulis.
- Voigt, J. (1995). Merkmale der interpretativen Unterrichtsforschung zum Fach Mathematik. In H. G. Steiner & H. J. Vollrath (Hrsg.), *Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze* (S. 153–160). Aulis.
- Voßmeier, J. (2008). Schriftliche Standortbestimmungen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Vortrag auf GDM Arbeitskreis Grundschule Arbeitsgruppe Arithmetik. [http://www2.leuphana.de/gdm\\_grundschule/Alte\\_Homepage/tagung2008.htm](http://www2.leuphana.de/gdm_grundschule/Alte_Homepage/tagung2008.htm)
- Vygotskij, L. S. (1978) *Mind in society – The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Walshaw, M. & Anthony, G. (2008). The Teacher's Role in Classroom Discourse. A Review of Recent Research into Mathematics Classrooms. *Review of Educational Research*, 78(3), 516–551.
- Walther, G. (2004). *Gute Aufgaben*. [http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material\\_aus\\_STG/Mathe-Module/Mathe1.pdf](http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/Mathe1.pdf)

- Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (Hrsg.) (2007). *Bildungsstandards für die Grundschule. Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen.
- Wartha, S. & Güse, M. (2009). Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischem Grundwissen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30 (3/4), 256–280.
- Wartha, S. & Schulz, A. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe: Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Spektrum.
- Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Springer
- Wittmann, E. (1993). „Weniger ist mehr‘: Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule“ Müller, K. (Ed.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 1993* (S. 394–397). Franzbecker.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. (1990/2017). *Handbuch produktiver Rechenübungen - Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Klett.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. (1992/2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen – Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Klett.
- Wittmann, E. Ch. (1993). ‘Weniger ist mehr‘. Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In K.P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1993* (S. 394–397). Hildesheim: Franzbecker.
- Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics Education as a ‘Design Science’. *Educational Studies in Mathematics*, 29 (4), 355–374.
- Wittmann, E. Ch. (2001). Konzentration des Stoffes auf die tragenden Grundideen. In E. Wittmann et al., *Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr Lehrerband* (S. 4–6). Klett.
- Wittmann, E. Ch. (2009). Die Grundkonzeption von „mathe 2000“ für den Mathematikunterricht der Grundschule <http://www.mathematik.tu-dortmund.de/didaktik/mathe2000/pdf/Grundkonzeption%20mathe%202000.pdf>
- Wollring, B. (2008). *Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule*. Schulentwicklung [https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/upload/tagung20080424/2008\\_Wollring\\_Lernumgebungen.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/upload/tagung20080424/2008_Wollring_Lernumgebungen.pdf)
- Wygotski, L. S. (1972). *Denken und Sprechen*. Fischer.
- Zankov, L. (1973). *Didaktik und Leben: Beiträge zu einer neuen Didaktik*. Schroedel.

#### Online Ressourcen

- SINUS Grundschule Mathematikmodule und weitere Literatur <http://www.sinus-grundschule.de/index.php?id=814>
- KIRA Projekt Materialien und Unterrichtsideen <https://kira.dzlm.de/geo-co>
- Primakom (Primarstufe Mathematik Kompakt)  
(vom Deutschen Zentrum Lehrerbildung Mathematik [dzlm](http://www.dzlm.de))  
Selbstlernplattform für alle am Mathematikunterricht beteiligten Personen <https://primakom.dzlm.de/node/460>